

### Capítulo 3: Torsión

En este capítulo se revisarán elementos con área transversal circular sometidos a pares de torsión y se estudiarán sus esfuerzos y deformaciones. Cuando una flecha es sometida a un par  $T$ , esta tiene una reacción interna  $T'$  de igual magnitud pero de sentido opuesto. Estos pares pueden representarse como flechas curvas como en el inciso a de la figura 3.1 o como vectores de par como en el inciso b.

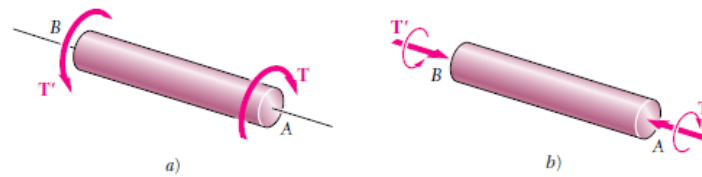


Figura 3.1

Como se observó anteriormente, la distribución real de esfuerzos bajo una carga dada es estáticamente indeterminada. Si tomamos un elemento del eje, como el de la figura 3.6, el par aplicado al eje ocasiona esfuerzos cortantes en las caras perpendiculares al eje.

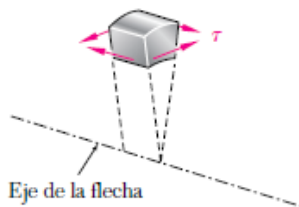


Figura 3.6

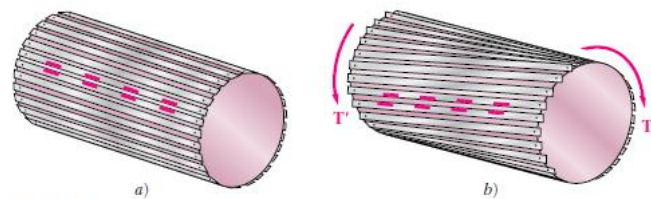


Figura 3.7

Así mismo, si tomamos un eje elaborado con duelas como el de la figura 3.7, y aplicamos un par en ambos extremos, de igual magnitud y sentido opuesto observamos que las duelas se deslizan. Esto demuestra que existen esfuerzos en planos longitudinales y en los planos perpendiculares de la flecha

#### **Deformaciones en un eje circular**

Considerando un eje circular sujetado en uno de sus extremos por un soporte fijo y aplicándole un par  $T$  en el extremo libre, ese extremo libre se torcerá un ángulo  $\phi$  conocido como ángulo de giro. En cierto rango de valores,  $\phi$  es proporcional a  $T$  y a la longitud de la barra.

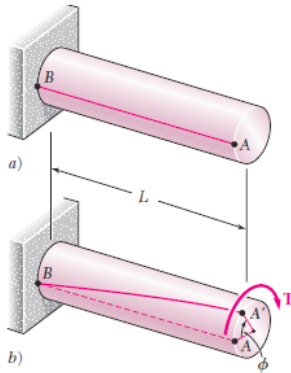


Figura 3.8

Una propiedad importante de los ejes circulares es que cuando se somete uno a torsión, todas sus secciones transversales permanecen planas y sin distorsión, esto es a pesar que cada sección de la barra gira una cantidad distinta. Esta condición aplica para ejes circulares huecos o sólidos.

Las deformaciones a cortante de un eje circular de longitud  $L$  y radio  $c$ , que ha sido girado un ángulo  $\phi$  se determina observando el elemento cuadrado ubicado entre dos círculos paralelos de radio  $c$  en la figura 3.14 b. Este elemento es un cuadrado cuando no se aplica torsión, pero cuando se aplica un par, al torcerse el eje el cuadrado se transforma en un rombo (figura 3.14 c). Entonces la deformación unitaria cortante  $\gamma$  es igual al ángulo entre las líneas  $AB$  y  $A'B$ . De esta deducción tenemos que

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

Siendo  $\rho$  una distancia que puede estar entre el eje de la flecha y el radio  $c$ . Esta relación demuestra que la deformación a cortante de una flecha circular tiene una variación lineal respecto a la distancia desde el eje de la flecha. Por lo tanto, la deformación máxima se encuentra en la superficie de la flecha, es decir, cuando  $\rho$  es igual al radio  $c$ .

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \frac{c\phi}{L} \quad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{m\acute{a}x}$$

### Esfuerzos en el rango elástico

Consideremos ahora un eje sometido a un par  $T$  tal que todos los esfuerzos a lo largo del eje circular permanecen en la zona elástica del material, es decir, que no rebasan el valor de  $\tau_y$ . Esto significa que no ocurren deformaciones plásticas y en condiciones de aplicar la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación a cortante, la cual nos dice:

$$\tau = G\gamma$$

Donde  $G$  es el módulo de rigidez o módulo de corte del material. Por lo tanto, si multiplicamos  $\gamma$  por  $G$ , obtenemos la siguiente relación:

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{m\acute{a}x}$$

Lo cual nos muestra que el esfuerzo cortante  $\tau$  en un eje circular también varía linealmente con respecto a la distancia al eje de la flecha, como se muestra en la figura 3.15

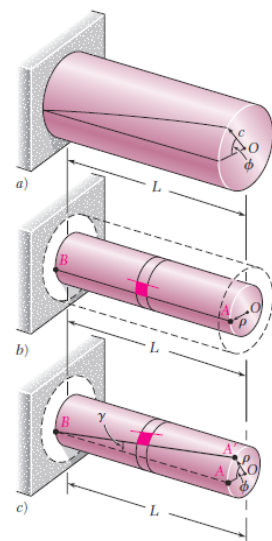
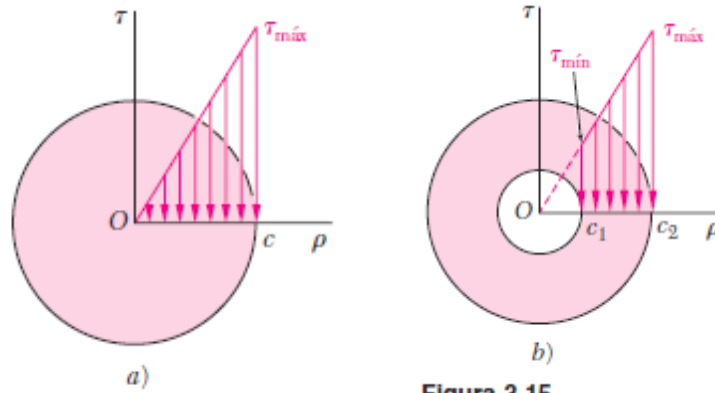


Figura 3.14



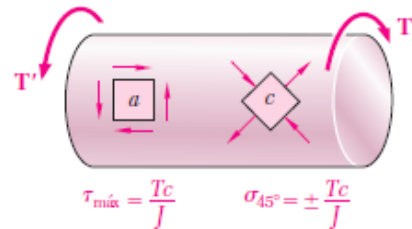
**Figura 3.15**

Ahora, recordemos que la suma de todas las fuerzas elementales en cualquier sección transversal de la flecha es igual a la magnitud del par T ejercido, se deduce la siguiente relación:

$$T = \frac{\tau_{máx} J}{c}; \quad \tau_{máx} = \frac{T c}{J}$$

Donde J es el momento polar de inercia con respecto a su centro O. Si sustituimos c por ρ, obtendremos el esfuerzo cortante a cualquier distancia ρ del eje de la flecha. Cabe mencionar que J para un eje sólido es igual a  $\frac{1}{2} \pi c^4$  y para un eje hueco es igual a  $\frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$

Consideremos ahora dos elementos en la flecha como en la figura 3.20. Podemos observar que al someter la flecha a dos pares en sus extremos, de misma magnitud pero diferentesentido, el elemento "a" se encuentra en cortante puro, mientras que el elemento "c" cuyas caras se encuentran a 45° del eje de la flecha, se encuentra sometido a esfuerzos de tensión y compresión. Es necesario advertir que todos los esfuerzos tienen como magnitud Tc/J.



**Figura 3.20**

Anteriormente, cuando se revisaron materiales dúctiles y frágiles se reslizaron las observaciones de que los dúctiles normalmente fallan a cortante. Es por eso que cuando una barra de material dúctil se somete a un par T, se rompe en un plano perpendicular al eje. Por otro lado, si para la misma prueba utilizamos un material frágil, estos son más sensibles a tensión que a corte. Por lo tanto, estos se romperán en planos perpendiculares a la dirección de la tensión máxima, es decir, en superficies que forman un ángulo de 45° con el eje de la flecha.



**Figura 3.21**

## Ángulo de giro en el rango elástico

Si recordamos, la deformación máxima a cortante esta dada por  $\gamma_{m\acute{a}x} = \frac{c}{L} \phi$  y dado que en la zona elástica se aplica la Ley de Hooke, por lo que tenemos lo siguiente:  $\gamma_{m\acute{a}x} = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{G} = \frac{T c}{J G}$

Si igualamos estas ecuaciones y despejamos  $\phi$  obtendremos lo siguiente:

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

Donde  $\phi$  está dado en radianes. Por lo tanto, observamos que el ángulo de giro es directamente proporcional a T y a la longitud de la flecha.

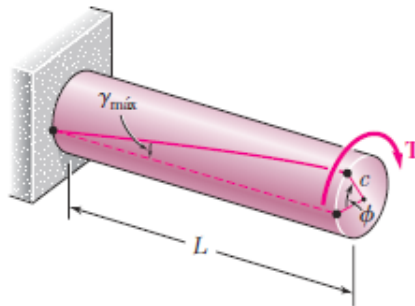


Figura 3.22

Esta última relación es aplicable para una flecha de sección transversal homogénea (G constante) y si sólo está cargado en sus extremos. En el caso de que un eje cuente con secciones de área transversal distinta e incluso de materiales distintos, y se encuentre sometido a pares en lugares distintos a sus extremos, tendremos que dividir el eje en segmentos que cumplan con las condiciones de  $\phi = \frac{TL}{JG}$ . En la figura 3.24 tendremos que analizar los segmentos AC, CD, DE y EB por separado y por último, para conocer el ángulo total de giro de la flecha, es decir, qué tanto gira A respecto de B, tendremos que sumar los ángulos de giro de cada segmento. De esta forma, el ángulo total de giro se expresa de la siguiente manera:

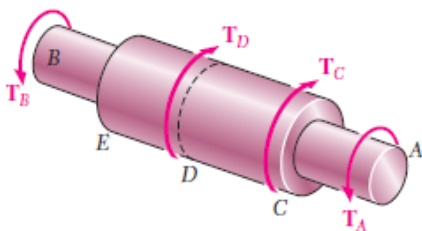


Figura 3.24

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

Referencia:

P. Beer, Ferdinand; Russel Johnston Jr., E.; T. de DeWolf, John; F. Mazurek, David . (2009). Mecánica de Materiales. México, Distrito Federal: McGraw-Hill.